

令和4年

数学科学習指導案

研究主題

数学的な思考力、判断力、表現力等を育む学習指導の在り方
～「対話的な学び」を重視した数学的活動を通して～

- | | | |
|---|-------|---|
| 1 | 日 時 | 令和4年度 6月20日 月曜日 5校時 13:35～14:25
令和4年度 6月21日 火曜日 市教研 14:00～14:50
(ビデオ視聴) |
| 2 | 展開学級 | 3年 組 (在籍 名) |
| 3 | 展開教室 | 3年 組 教室 |
| 4 | 授 業 者 | |
| 5 | 指 導 者 | 講 師
協力員 |
| 6 | 協 議 会 | 日時：6月21日(火) 場所：
時間：15:00～16:30 |

1 単元名 平方根

2 単元について

生徒たちは、小学校の算数で、自然数と0、小数、分数について学び、その計算方法を学習してきている。また、中学校1学年では、負の数と文字を用いて数を表すことを学び、その計算方法を学習してきている。これらは $\frac{n}{m}$ （ n, m は整数）に表すことのできる数（有理数）である。現実の世界の事象について考察するには、これまで学んだ数の範囲だけでは不十分な場合がある。このような場合に対応できるようにするため、中学校では、数の範囲を、正の数と負の数、さらには、無理数を含んだ範囲にまで広げる。

この単元では無理数の中でも主に平方根を扱うが、平方根は、1辺の長さが有理数である正方形の対角線の長さ、コピー機の倍率（A4からA3へ拡大する際の倍率等）など、身のまわりに多く見られる大事な数である。しかし、この新しい数は、生徒にとって理解しづらく、多くの生徒がつまずくことが予想される。導入として、身近にあるものを取り上げることで、有理数のみでは表すことができない数の存在や必要性を理解させたい。さらに、平方根の意味や表し方、近似値を調べるなど、様々な方法で平方根の概念を理解させていきたい。

これまでも新しい数を導入するときには、その数の存在や大小関係や計算という順序で指導してきている。ただ平方根の場合は、計算指導の順序が加法減法から乗法除法の順ではなく、乗法除法から加法減法の順となる。平方根をふくむ式の計算では、文字式と同類項をまとめる手続きと同じようにして考えて指導をしていけばよいが、計算方法の練習だけでなく、その方法の意味を理解させることも重視したい。

この単元の学習を通して、小数・分数の捉え方が大きく変わることとなる。「 $\frac{n}{m}$ （ n, m は整数）に表せる数」として有理数、「 $\frac{n}{m}$ （ n, m は整数）に表せない数」として無理数を学習し、有理数は有限小数か循環小数になり、無理数は循環しない無限小数になることを学習する。有理数と無理数の分類では、それぞれの数の集合に含まれる具体例をあげながら、生徒とともに分類整理を行うことにしたい。その際に、分数を小数で表す活動を生徒に取り組ませ、有理数は有限小数か循環小数になることを実感させたい。同時に循環小数を分数になおす方法も扱いたい。

生徒は、 π は無理数であり、「面積が2の正方形の一辺の長さが有理数ではない」ということは学習するが、このことについて生徒自身が実感を伴って理解しているかといえば、実情はなかなか厳しいものがある。教科書巻末には、背理法による証明を使って、 $\sqrt{2}$ が有理数でないことも学習するが、中学生にとって式の上で論理的矛盾を確認できたとしても、それが実感を伴った確認といえるかと問われれば、実態はそうにはなっていないと考える。そこで本時では、有理数と無理数が異なる性質をもっていることを、方程式を利用して有限小数、循環小数を分数に直す活動を生徒に体験させ、その方法を使って無理数を分数にすることが難しいことを生徒に発見させたい。有理数は分数にできるが、無理数は難しいという状況を経験させ、無理数が有理数とは異なる性質をもつ数であることを理解させたい。

本単元で学習した内容は後の「二次方程式」「三平方の定理」の学習へとつながり、数の範囲を平方根に拡張することで、二次方程式の解が得られ、三平方の定理を利用して長さを求めることができるようになる。このような学習を通して、数学を学習することのよさをより一層感じさせたい。

3 生徒の実態

4 「対話的な学び」を重視した数学的活動について

「対話」とは、「各自が自分の考えを表現し、その多様な表現を共有し、そこから自分の考えを見通しつつ、他者の考えから学び、相互に発展させていくこと」である。「他者の考えから学び、相互に発展させていく」という部分が特に重要である。「対話的な学び」とは、子供同士の協働、教職員との対話、先哲の考え方を手掛かりに、考えること等を通じ、自己の考えを広げ深めることである。本時は、小数の特徴について生徒自身によって、有限小数、無限小数、循環小数、循環しない無限小数などの特徴を発見させ、それをクラス全体の前で発表させることで、対話的な学びを深めていきたい。また、後半では、循環小数を分数に直す活動を行う中で、その解法をペアで話し合わせ、考えを共有することにより行いたい。ペアワークで大切なことは、生徒が真の対話をしているかどうか教師自身が机間指導で確かめることである。本時では、生徒の発言を的確に拾い、意図的に指名をして、その意見を学級全体で共有し、新たな考えを引き出すことで、授業の理解を深めていきたい。今回の授業では、ペアを作り、表現したり説明したりする活動を設けるが、なるべく全員の生徒に自分の考えをもたせてから集団解決に臨めるようにしていきたい。そのためにも、解決方法を見通す時間を大切に、生徒一人一人から意見を引き出せるように心がけたい。

5 単元の目標

- (1) 次のような知識及び技能を身に付けること。
 - (ア) 数の平方根の必要性和意味を理解することができる。
 - (イ) 数の平方根を含む簡単な式の計算をすることができる。
 - (ウ) 具体的な場面で数の平方根を用いて表したり処理したりすることができる。
- (2) 次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること。
 - (ア) 既に学習した計算の方法と関連づけて、数の平方根を含む式の計算の方法を考察し表現することができる。
 - (イ) 数の平方根を具体的な場面で活用することができる。
- (3) 次のような学びに向かう力や人間性を身に付けること。

数の平方根のよさを実感して粘り強く考え、数の平方根について学んだことを生活や学習に生かそうとしたり、数の平方根を活用した問題解決の過程をふり返って評価・改善しようとしたりすることができる。

6 評価規準

知識・技能	思考・判断・表現	主体的に学習に取り組む態度
①数の平方根の必要性和意味を理解している。 ②数の平方根を根号を用いて表すことができる。 ③数の平方根の大小関係を理解している。 ④有理数と無理数について理解している。 ⑤数の平方根を含む簡単な式の計算をすることができる。 ⑥具体的な場面で数の平方根を用いて表したり処理したりすることができる。	①既に学習した計算の方法と関連付けて、数の平方根を含む式の計算の方法を考察し表現することができる。 ②有限小数、循環小数が分数に表される理由を説明することができる。 ③具体的な場面で数の平方根を用いて表したり処理したりすることができる。	①数の平方根のよさを実感して粘り強く考え、数の平方根について学んだことを生活や学習に生かそうとしたり、数の平方根を活用した問題解決の過程を振り返って評価・改善しようとしたりしている。

7 指導と評価の計画指導

「平方根」 16 時間【本時の展開 5 時間目】

◎…主たる評価の観点 ○…準ずる評価の観点

時	小単元名	○学習問題（学習課題） ・ 学習内容 波線下線…主たる対話的な学び	評価の観点			記録	主たる評価 [観点] (評価方法)
			知	思	態		
1	平方根	○正方形の面積と辺の長さを求めよう。 ・ドット上の正方形の 1 辺の長さを調べる活動を通して、いろいろな大きさの正方形について考える。 <u>(ペアでどんな正方形を見つけたのか共有する。)</u> ・面積が 2 cm^2 の正方形に注目し、「2 乗すると 2 になる数」などの存在について考える。	◎	○		○	[知①] 数の平方根の必要性和意味を理解することができるか。(ノート) (ワークシート)
2		○いろいろな数の平方根を求めよう。 ・平方根は根号を使って表せること及びその表し方を理解する。	◎				[知①] 数の平方根の必要性和意味を理解することができるか。(ノート) (行動観察)
3		○平方根の大きさを比べよう。 ・平方根の大小を比べ、不等号を使って表す。 <u>(ペアでどんな方法を使って大小を比べたのか共有する。)</u>	◎	○			[知③] 平方根の大小関係について不等号を用いて表すことができるか(ノート) (行動観察)
4	平方根の値	○平方根の値を調べよう。 ・平方根の近似値を、けた数を増やしながら調べる。 ・平方根の近似値を、電卓を用いて求める。	◎				[知③] 平方根の大小関係や、電卓を用いて平方根の近似値を求めることができるか。(ノート) (行動観察)
5	有理数と無理数 (本時)	○数の世界のひろがりについて考えよう。 ・有理数と無理数の意味及び数の範囲の広がりについて理解する。 ・有理数と無理数を小数で表したときの特徴を調べる。 <u>(ペアで話合わせ考えを共有する)</u>	○	◎			[思考②] 有限小数、循環小数が分数に表せる理由を説明することができる。(ノート) (行動観察)
6	真の値と近似値	○求めた値の正確さを考えよう。 ・近似値、誤差、有効数字の意味を理解する。 ・近似値を $a \times 10^n$ の形で表すことを、理解する。	◎				[知③] 誤差や近似値、数を $a \times 10^n$ の形で表すことについて理解できるか。(ノート) (行動観察)
7	根号をふくむ式の計算(乗除)	○根号のついた数の乗除の計算の仕方を考えよう。 ・ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ や $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$ が成り立つことを理解する。		◎	○	○	[思考①] 既に学習した計算の方法と関連づけて、数の平方根を含む式の計算方法を考察し表現することができるか。(ノート) (小テスト)

8		○根号のついた数の乗除の計算をしよう。 ・根号を含む数を、目的に応じて変形する。 ・ $a\sqrt{b}$ の形の数を $\sqrt{c}$ の形に変形することを理解する。	◎				[知⑤]数の平方根を含む簡単な式の計算をすることができるか。 (ノート)(行動観察)
9		○根号の中の数を外に出そう。 ・根号の中にある数を根号の外に出したりすることについて考える。	◎				[知⑤]数の平方根を含む簡単な式の計算をすることができるか。 (ノート)(行動観察)
10		○根号のついた数の大きさをくらべよう。 ・分母を有理化する方法について理解する。	◎	○			[知⑤]分母の有利化について理解をすることができるか。 (ノート)(行動観察)
11		○根号のついた数の値をくらべよう。 ・小数点の位置に着目して、平方根の近似値を求める。 ・根号の中の数に10倍、100倍、1000倍にしたときに、その数がどのような数になるかについて理解する。	◎				[知③]根号のついた数の近似値を求めることができるか。 (ノート)
12	根号をふくむ式の計算 (加減)	○根号のついた数の加減の計算の仕方を考えよう。 ・根号を含む式の加減の計算が乗除のようにできないことを、反例をあげて説明する。 (小グループで共有する。)		◎	○	○	[思考③]既に学習した計算の方法と関連づけて、数の平方根を含む式の計算方法を考察し表現することができるか。 (ノート)(小テスト)
13		○根号のついた数の加減の計算をしよう。 ・根号を含む数の加法や減法の計算をする。 ・根号の中の数が同じ場合のみ、文字式と同類項どうしの計算と同じように考え、計算ができる。	◎				[知⑤]根号をふくむ式の計算のしかたを、数や文字式の計算と同様に考えることができるか。 (ノート)(行動観察)
14		○根号を含むいろいろな式の計算のしかたを考えよう。 ・根号をふくむ式においても、四則計算が可能であることを理解する。	◎		○		[知⑤]根号をふくむ式の和と差や、根号を含む式の積の計算ができるか。(ノート)
15	平方根の利用	○身の回りの問題を平方根を利用して解決しよう。 ・平方根を利用して、2倍のピザを作るには半径をいくつにすればよいか考える。		○	◎	○	[態②]平方根について学んだことを生活や学習にいかそうとすることができるか。 (ノート)(ワークシート)
16	章末問題	○学びをたしかめよう ○学びを身につけよう ・単元全体の学習内容についてのテストに取り組み、単元で学習したことがどの程度身についているかを自己評価することができるようにする。				○	知①～⑥単元テスト 思①②③単元テスト

(1) 本時の目標

- 能】

- 【思考力、判断力、表現力等】

--	--

過程	生徒の学習内容と活動 波線下線部…主たる対話的な学び	教師の指導・留意点 ◎指導や支援 ◆評価(評価方法)
導入 10分	1. 数を小数に直す 次の数を小数に直してみよう。 $\begin{array}{ccc} \cdot \frac{2}{5} & \cdot \frac{1}{3} & \cdot \frac{2}{7} \end{array}$ $\sqrt{2}$ $\cdot \frac{2}{5} = 0.4$ 有限小数 $\cdot \frac{1}{3} = 0.33333\cdots$ 無限小数 $\cdot \frac{2}{7} = 0.285714285714\cdots$ 無限小数 $\cdot \sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ 無限小数 $\cdot \frac{1}{3}$ $\cdot \frac{2}{7}$ } 循環小数 $\cdot \sqrt{2}$ } 循環しない無限小数 ＜予想される生徒の反応＞ ・ きちんと割り切れる数がある。 ・ 割り切れない数がある。 ・ 割り切れない数は、同じ数がくり返される小数と適当に数字が並ぶ小数がある。 2. 小数を特徴によって分類する。 <u>できるだけ、生徒に小数の特徴を見つけさせ、発表させる。</u> <u>発表した言葉を全体で共有する。</u>	◎ 分数を小数に直すには、$A \div B$をすればよいことに気付かせノートに筆算や電卓で計算させる。 ◎ 4つの数を「小数」に直していく活動を通して、「分数」や「根号のついた数」には、「有限小数」と「無限小数」が存在することに気付かせるようにする。 ◎ 循環小数の表し方を指導する $\cdot 0.33333\cdots 0.\dot{3}$ $\cdot 0.285714285714\cdots = 0.285714\dot{}$ ◎ 「有限小数」、「無限小数」、「循環小数」の定義に触れる。 ◎ 小数第1位と2位が繰り返す小数(0.636363…など)についても確認し、すべての循環小数が記号を使って表せることに気付かせる。 ◎ 今までの学習から$\sqrt{2}$は計算で求められないことを確認し、$\sqrt{}$の表を用いて、循環する部分がないことを確認する。 ◎ 課題の数以外にも有限小数、循環小数、循環しない小数を例に挙げて、小数はそれぞれに分類できることを確認する。 ◆ 有限小数、循環小数、循環しない小数について理解しているか 【知識・技能】(行動観察)

問題
把握
5
分

3. 小数を分数に表す

【学習課題】 次の小数の中ですぐに分数にできるのはどの数だろう。

・ 0.6 ・ 0.2 ・ 0.45 0.285714 ・ 1.7320508… ($\sqrt{3}$)

<予想される生徒の反応>

・ 0.6 は分数にできそう。

(1) 0.6 を分数に直す

㊦ 0.1 は $\frac{1}{10}$ なので、0.6 は 0.1 が 6 つ分なので、 $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

㊧ 0.6 は、 $6 \div 10$ の商なので、 $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

・ 0.6 以外はやり方がわからないが、他の小数は分数にできるのだろうか。

・ すべての小数が分数にできるのだろうか。

・ $\sqrt{3}$ は、循環していないけど、分数であらわせるのかな。

・ 循環小数は、さきほど分数で表せたことから、分数で表せるのではないか。

(2) 0.22222… を分数で表す方法を考える。

<予想される生徒の反応>

$x = 0.222222\cdots$ ①とおく

両辺を 10 倍すると

$10x = 2.2222\cdots$ ②

②－①を計算すると

$10x = 2.2222\cdots$

－) $x = 0.2222\cdots$

$9x = 2$

$x = \frac{2}{9}$

◎ 小学校、中学校で学習した方法
を利用し、答えが $\frac{6}{10}$ であるこ
とを考えさせる。

◎ 「0.6 を分数に直す方法」では、
それ以外の小数は分数では表せ
ないことを意識させる。

◎ 循環する部分が少ない 0.2 を
考え、見通しを持たせる。生徒か
ら考えがでない場合には、文字
で置き ($x = 0.2222\cdots$ とおき、
10 倍した数から x を引き算す
ることを教師から指導する。

見通し
4 分

自力 解決 15 分 共有 3分	(3) <u>循環小数(0.45)を分数の形に変形する。</u> <予想される生徒の反応> ・小数点第1位、2位が循環するので難しい。 ・先ほどのように、循環小数を文字でおく。 ・0.2を分数にした考え方が使えるのではないかな。 ・小数点以下繰り返す数字1つではないので、両辺を10倍しても消えない。 $x = 0.454545\cdots \quad \text{①とおく}$ 両辺を100倍すると $100x = 45.454545\cdots \quad \text{②}$ ②－①を計算すると $\begin{array}{r} 100x = 45.454545\cdots \\ -) \quad x = 0.454545\cdots \\ \hline 99x = 45 \\ x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11} \end{array}$ ・<u>個人で考える時間をとり、何人かの考えがでてきているようなら、隣の席のペア同士、解法を話合わせ、考えを共有する</u> (4) <u>循環小数(0.285714)を分数の形に変形する。</u> $x = 0.285714285714\cdots \quad \text{①とおく}$ 両辺を1000000倍すると $1000000x = 285714.285714\cdots \quad \text{②}$ ②－①を計算すると $\begin{array}{r} 1000000x = 285714.285714\cdots \\ -) \quad x = 0.285714\cdots \\ \hline 999999x = 285714 \end{array}$ $x = \frac{285714}{999999} = \frac{31746}{111111} = \frac{10582}{37037}$ $x = \frac{2}{7}$	◎机間指導をし、考えられない生徒については、0.2の考えが利用できないか考えさせる。 ◎小数点以下の値を消すために100倍することに気づかせる ◆有限小数や循環小数を、$\frac{n}{m}$ (n, mは整数) に表すことができることを、ペアで説明しているか。【思考・判断・表現】 (ノート・行動観察) ◎循環小数のような規則性として繰り返される数字の列(循環節)があると、分数で表すことができることに気づかせる。 ◎$\frac{285714}{999999}$の約分で手が止まっている生徒には、分数にできたことを確認し、導入で出てきた小数なので、約分をしたら、$\frac{2}{7}$になることを伝える。
--	--	---

共有
3分

・個人で考える時間をとり、何人かの考えがでてきているようなら、隣の席のペア同士、解法を話合わせ、考えを共有する。その後、黒板で発表する。

(5) $1.7320508\cdots$ ($\sqrt{3}$) を分数にする。

<予想される生徒の反応>

・ $\sqrt{3}$ は、無限小数なので、文字で置き、何倍かすると

$\frac{n}{m}$ (n, m は整数) のような分数で表せるのではないかな。

・右辺が循環しないので、何倍にするかわからない。

・循環しない小数は何倍しても、小数点以下をそろえることができないので、分数化できないのではないかな。

4 $\frac{n}{m}$ (n, m は整数) で表せる数を有理数、それ以外を無理数ということを知る。

5 今日習ったことをもとに、本時のまとめをする。

・みんなが知っている数は、どんな数でも小数、分数で表せたかな。

・無理数は、今日の方法でどうして分数で表すことができなかったかな。

・循環小数は、なぜ分数に直すことができたのか。その発想はどこから導かれたのか。

[まとめ]

$\left\{ \begin{array}{l} \text{有限小数} \\ \text{無限小数} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{循環小数} \\ \text{循環しない無限小数} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{有理数} \\ \text{無理数} \end{array}$

振り
返り
10
分

◆有限小数や循環小数を、

$\frac{n}{m}$ (n, m は整数) に表すことができることを、ペアで説明しているか。【思考・判断・表現】
(ノート・行動観察)

◎ $\sqrt{3}$ のような無限小数でも、

$\frac{n}{m}$ (n, m は整数) のような分数で表すことができるか考えさせる。

◎右辺が循環しないことから、右辺の小数点以下の数が消去できないことを確認し、求められないことを確認する。

◎整数も分数で表せるため、有理数となることを確認する。

・整数： $5 = \frac{5}{1}$

◎循環小数の表記の仕方や分数を小数に直す方法など、本日学習したことを振り返りながら、無理数、有理数についてまとめる。

◎循環しない小数が $\frac{n}{m}$ (n, m は整数) で表せないことは教科書巻末のP35の背理法を使った証明に記載があることを紹介しておき、ここでは簡単に説明するのみとする。

(3) 本時の評価

- ・有限小数、循環小数、循環しない無限小数について理解し、有限小数や循環小数を分数で表すことができたか。【知識・技能】
- ・有限小数や循環小数が分数に表せる理由を説明することができたか。【思考・判断・表現】

(4) 板書計画

「本時の目標」数の世界のひろがりについて考えよう

次の数を小数に直してみよう。

① $\frac{2}{5} = 0.4$ 有限小数…限りがある小数

② $\frac{1}{3} = 0.33333 \dots$ 循環小数…決まった数字が繰り返される小数

③ $\frac{2}{7} = 0.285714 \dots$ 無限小数…どこまでも続く小数

④ $\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$ 循環しない無限小数…同じ数の繰り返しがない無限小数

【学習課題】次の小数の中ですぐに分数にできるのはどの数だろう。

・0.6 ・0.2 ・0.45 0.285714 ・1.7320508… ($\sqrt{3}$)

⑦0.1は $\frac{1}{10}$ なので、0.6は0.1が6つ分なので、 $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

⑧0.6は、 $6 \div 10$ の商なので、 $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

他の小数は分数で表せるのだろうか？

<方針>

① $x = 0.222222\dots$ ①とおく

両辺を10倍すると

$10x = 2.2222\dots$ ②

②-①を計算すると

$10x = 2.2222\dots$

$x = 0.2222\dots$

$9x = 2$

$x = \frac{2}{9}$

② $x = 0.454545\dots$ ①とおく

両辺を100倍すると

$100x = 45.454545\dots$ ②

②-①を計算すると

$100x = 45.454545\dots$

$x = 0.454545\dots$

$99x = 45$

$x = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$

③ $x = 0.285714285714\dots$ ①とおく

両辺を1000000倍すると

$1000000x = 285714.285714\dots$ ②

②-①を計算すると

$1000000x = 285714.285714\dots$

$x = 0.285714\dots$

$999999x = 285714$

$x = \frac{285714}{999999}$

$x = \frac{2}{7}$

$\sqrt{3}$ のような無限小数でも、分数で表すことはできるだろうか。

・ $\sqrt{3}$ は、無限小数なので、文字で置き、何倍かすると考えられるのでは。

・右辺が循環しないので、何倍にするかわからない。

・循環しない小数は何倍しても、小数点以下をそろえることができないので、分数化できないのではないかな。

(まとめ)

$\frac{n}{m}$ (n, mは整数) で表せる数を有理数、それ以外を無理数という。

3 年 () 組 氏名 ()

来週の 6 月 20 日 (月) に研究授業をすることになりました。成績には関係ありませんので、実態調査に協力をお願いいたします。

調査問題	回答欄
・ $2 \div 5$ を小数で表しなさい。	
・ 0.15 を分数で表しなさい。	
・ $\frac{12}{18}$ を約分しなさい。	
・ 30 を素因数分解しなさい。	
・ $2x + 5x$ を計算しなさい。	
・ $6x - 2y + 2x + 3y$ を計算しなさい。	
・ 方程式 $9x = 27$ を解きなさい。	
・ 方程式 $0.2x = 4$ を解きなさい。	
・ 連立方程式 $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ を加減法で解きなさい。	
・ $\frac{1}{9}$ はおよそどの位の数ですか。次の①～④から 1 つ 選びなさい。 ① 10 ② 1 ③ 0.1 ④ 0.2	